

1 Representaciones de C^* -álgebras conmutativas

- Representaciones irreducibles
- Extensión de representaciones
- Medidas operatoriales y medidas espectrales
- Correspondencia entre medidas espectrales, representaciones, y sus extensiones

2 Teorema espectral y cálculo funcional de Borel

Representaciones irreducibles

Sea $A = C_0(X)$ una C^* -álgebra conmutativa, donde X es un espacio de Hausdorff localmente compacto.

Supongamos que $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ es irreducible. Por el lema de Schur se tiene que $\pi(A)' = \mathbb{C}Id$. Como $\pi(A)$ es conmutativa se tiene $\pi(A) \subseteq \pi(A)' \subseteq \mathbb{C}Id$, y por lo tanto $\pi(A) = \mathbb{C}Id$. Entonces todo subespacio de $\mathcal{H}$ es π -invariante, y como π es irreducible debe ser $\dim \mathcal{H} = 1$, y por lo tanto $B(\mathcal{H}) \cong \mathbb{C}$. Luego $\pi \underset{u}{\sim} \delta_x$, para algún $x \in X$.

CONCLUSIÓN: A menos de equivalencia unitaria, las representaciones irreducibles de A son los elementos del espectro de A .

Supongamos que $\pi : A = C_0(X) \rightarrow B(\mathcal{H})$ es una representación no degenerada. Dados $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, el mapa $A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $a \mapsto \langle \pi(a)\xi, \eta \rangle$ es una funcional lineal acotada:

$$\|\langle \pi(a)\xi, \eta \rangle\| \leq \|\pi(a)\xi\| \|\eta\| \leq \|a\|_\infty \|\xi\| \|\eta\|. \quad (1)$$

Entonces, por el teorema de representación de Riesz, existe una única medida $\mu_{\xi, \eta} \in M(X)$ tal que para todo $a \in A$:

$$\langle \pi(a)\xi, \eta \rangle = \int a \, d\mu_{\xi, \eta}.$$

Lema

El mapa $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow M(X)$ tal que $(\xi, \eta) \mapsto \mu_{\xi, \eta}$ es sesquilineal y acotada.

Demostración.

Suponiendo probado que el mapa es sesquilineal, se tiene que es acotado, pues de acuerdo a (1) la funcional asociada a $\mu_{\xi, \eta}$ es continua, y más precisamente se tiene $\|\mu_{\xi, \eta}\| \leq \|\xi\| \|\eta\|$.

El mapa es lineal en la primera variable:

$$\begin{aligned} \int a d\mu_{\alpha\xi_1 + \beta\xi_2, \eta} &= \langle \pi(a)(\alpha\xi_1 + \beta\xi_2), \eta \rangle = \alpha \langle \pi(a)\xi_1, \eta \rangle + \beta \langle \pi(a)\xi_2, \eta \rangle \\ &= \alpha \int a d\mu_{\xi_1, \eta} + \beta \int a d\mu_{\xi_2, \eta} = \int a d(\alpha\mu_{\xi_1, \eta} + \beta\mu_{\xi_2, \eta}). \end{aligned}$$

Luego $d\mu_{\alpha\xi_1 + \beta\xi_2, \eta} = d(\alpha\mu_{\xi_1, \eta} + \beta\mu_{\xi_2, \eta})$, o sea $\mu_{\alpha\xi_1 + \beta\xi_2, \eta} = \alpha\mu_{\xi_1, \eta} + \beta\mu_{\xi_2, \eta}$.

Para concluir vemos ahora que $\overline{\mu_{\xi, \eta}} = \mu_{\eta, \xi}$:

$$\int a d\mu_{\eta, \xi} = \langle \pi(a)\eta, \xi \rangle = \langle \eta, \pi(a)^*\xi \rangle = \overline{\langle \pi(\bar{a})\xi, \eta \rangle} = \overline{\int \bar{a} d\mu_{\xi, \eta}} = \int a d\overline{\mu_{\xi, \eta}}.$$

Entonces $\mu_{\eta, \xi} = \overline{\mu_{\xi, \eta}}$.



Denotamos por $\mathcal{B}_X$ la σ -álgebra de Borel de X , y

$$B_\infty(X) := \{\psi : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ medible Borel y acotada}\}.$$

Notar que $B_\infty(X)$ es una C^* -álgebra con $\|\cdot\|_\infty$, que contiene a $C_0(X)$ como C^* -subálgebra.

Proposición

Para cada $\psi \in B_\infty(X)$, el mapa $b_\psi : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$(\xi, \eta) \mapsto \int \psi d\mu_{\xi, \eta}$$

es sesquilineal y acotado.

Demostración.

El mapa $\Lambda_\psi : M(X) \rightarrow \mathbb{C}$ dado por $\mu \mapsto \int_X \psi d\mu$ es lineal y acotado, y b_ψ es la composición de Λ_ψ con el mapa sesquilineal acotado dado por el lema previo. Luego b_ψ es sesquilineal y acotado. □

Se deduce del teorema de representación de Riesz que existe un único operador $\pi(\psi) \in B(\mathcal{H})$ tal que $b_\psi(\xi, \eta) = \langle \pi(\psi)\xi, \eta \rangle$, para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$.

Lema

(1) Sea $\nu_a \in M(X)$ tal que $d\nu_a = ad\mu_{\xi, \eta}$, $a \in C_0(X)$. Entonces

$$\nu_a = \mu_{\pi(a)\xi, \eta}.$$

(2) Si $T \in \pi(A)' (\supseteq \pi(A))$ entonces $\mu_{T\xi, \eta} = \mu_{\xi, T^*\eta}$.

Demostración.

(1) Si $b \in A$, entonces

$$\int b d\nu_a = \int bad\mu_{\xi, \eta} = \langle \pi(ba)\xi, \eta \rangle = \langle \pi(b)\pi(a)\xi, \eta \rangle = \int bd\mu_{\pi(a)\xi, \eta}.$$

Entonces $\nu_a = \mu_{\pi(a)\xi, \eta}$.

(2) Para todo $a \in A$ se tiene:

$$\int ad\mu_{T\xi, \eta} = \langle \pi(a)T\xi, \eta \rangle = \langle T\pi(a)\xi, \eta \rangle = \langle \pi(a)\xi, T^*\eta \rangle = \int ad\mu_{\xi, T^*\eta}.$$

Entonces $\mu_{T\xi, \eta} = \mu_{\xi, T^*\eta}$.

Proposición

El mapa $\bar{\pi} : B_{\infty}(X) \rightarrow B(\mathcal{H})$ tal que $\psi \mapsto \bar{\pi}(\psi)$ es una representación unital que extiende a π .

Demostración.

- ❶ $\bar{\pi}$ extiende a π , porque si $a \in C_0(X)$, para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ se tiene:

$$\langle \bar{\pi}(a)\xi, \eta \rangle = b_a(\xi, \eta) = \int a d\mu_{\xi, \eta} = \langle \pi(a)\xi, \eta \rangle.$$

- ❷ $\bar{\pi}$ es lineal, pues si $\varphi, \psi \in B_{\infty}(X)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\xi, \eta \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\pi}(\alpha\psi + \beta\varphi)\xi, \eta \rangle &= \int \alpha\psi + \beta\varphi d\mu_{\xi, \eta} = \alpha \int \psi d\mu_{\xi, \eta} + \beta \int \varphi d\mu_{\xi, \eta} \\ &= \langle (\alpha\bar{\pi}(\psi) + \beta\bar{\pi}(\varphi))\xi, \eta \rangle \end{aligned}$$

- ❸ $\bar{\pi}(\bar{\psi}) = \bar{\pi}(\psi)^*$, pues si $\varphi, \psi \in B_{\infty}(X)$, $\xi, \eta \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\pi}(\bar{\psi})\xi, \eta \rangle &= \int \bar{\psi} d\mu_{\xi, \eta} = \overline{\int \psi d\mu_{\xi, \eta}} = \overline{\int \psi d\mu_{\eta, \xi}} = \overline{\langle \bar{\pi}(\psi)\eta, \xi \rangle} \\ &= \langle \xi, \bar{\pi}(\psi)\eta \rangle = \langle \bar{\pi}(\psi)^*\xi, \eta \rangle. \end{aligned}$$

- ① $\bar{\pi}$ es multiplicativa. Primero consideremos $\psi \in B_{\infty}(X)$, $a \in C_0(X)$. Si $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, entonces por la parte (1) del lema anterior:

$$\langle \bar{\pi}(\psi a)\xi, \eta \rangle = \int \psi a d\mu_{\xi, \eta} = \int \psi d\mu_{\pi(a)\xi, \eta} = \langle \bar{\pi}(\psi)\pi(a)\xi, \eta \rangle.$$

Luego es $\bar{\pi}(\psi a) = \bar{\pi}(\psi)\pi(a)$, para todo $\psi \in B_{\infty}(X)$ y $a \in C(X)$. También se tiene $\bar{\pi}(\psi a) = \pi(a)\bar{\pi}(\psi)$:

$$\bar{\pi}(\psi a)^* = \bar{\pi}(\overline{\psi a}) = \bar{\pi}(\overline{\psi} \bar{a}) = \bar{\pi}(\overline{\psi})\pi(\bar{a}) = \bar{\pi}(\psi)^*\pi(a)^* = (\pi(a)\bar{\pi}(\psi))^*.$$

Por lo tanto:

$$\int a \psi d\mu_{\xi, \eta} = \langle \bar{\pi}(\psi a)\xi, \eta \rangle = \langle \pi(a)\bar{\pi}(\psi)\xi, \eta \rangle = \int a d\mu_{\bar{\pi}(\psi)\xi, \eta},$$

de donde $\psi d\mu_{\xi, \eta} = d\mu_{\bar{\pi}(\psi)\xi, \eta}$. Por último, si $\psi_1, \psi_2 \in B_{\infty}(X)$:

$$\langle \bar{\pi}(\psi_1 \psi_2)\xi, \eta \rangle = \int \psi_1 \psi_2 d\mu_{\xi, \eta} = \int \psi_1 d\mu_{\bar{\pi}(\psi_2)\xi, \eta} = \langle \bar{\pi}(\psi_1)\bar{\pi}(\psi_2)\xi, \eta \rangle,$$

$$\forall \xi, \eta \in \mathcal{H}$$

- ② $\bar{\pi}$ es no degenerada porque extiende a π , que no es degenerada. Luego $\bar{\pi}(1) = Id$, lo que concluye la demostración.

Definición

Definimos el mapa $E : \mathcal{B}_X \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ dado por

$$E(\Delta) := \overline{\pi}(\chi_\Delta).$$

Proposición

- (1) $E(\Delta)^* = E(\Delta)$.
- (2) $E(\Delta)^2 = E(\Delta)$.
- (3) $E(\emptyset) = 0$, $E(X) = Id$.
- (4) $E(\Delta_1 \cap \Delta_2) = E(\Delta_1)E(\Delta_2)$.
- (5) Si $\Delta = \biguplus_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ entonces $E(\Delta) = \sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_n)$, en la topología SOT.

Demostración.

- (1) $E(\Delta)^* = \overline{\pi}(\chi_\Delta)^* = \pi(\overline{\chi}_\Delta) = \overline{\pi}(\chi_\Delta) = E(\Delta)$.
- (2) $E(\Delta)^2 = \overline{\pi}(\chi_\Delta)\overline{\pi}(\chi_\Delta) = \overline{\pi}(\chi_\Delta\chi_\Delta) = \overline{\pi}(\chi_\Delta) = E(\Delta)$.
- (3) $E(\emptyset) = \overline{\pi}(\chi_\emptyset) = \overline{\pi}(0) = 0$. Y $E(X) = \overline{\pi}(\chi_X) = \overline{\pi}(1) = Id$.
- (4) $E(\Delta_1 \cap \Delta_2) = \overline{\pi}(\chi_{\Delta_1 \cap \Delta_2}) = \overline{\pi}(\chi_{\Delta_1}\chi_{\Delta_2}) = \overline{\pi}(\chi_{\Delta_1})\overline{\pi}(\chi_{\Delta_2}) = E(\Delta_1)E(\Delta_2)$.

Continuación de la demostración:

$$\begin{aligned} (5) \quad & \| (E(\Delta) - \sum_{k=1}^n E(\Delta_k)) \xi \|^2 \\ &= \langle (E(\Delta) - \sum_{k=1}^n E(\Delta_k))^* (E(\Delta) - \sum_{k=1}^n E(\Delta_k)) \xi, \xi \rangle \\ &= \langle (E(\Delta) - \sum_{k=1}^n E(\Delta_k)) (E(\Delta) - \sum_{k=1}^n E(\Delta_k)) \xi, \xi \rangle \\ &= \langle (E(\Delta) - \sum_{k=1}^n E(\Delta_k)) \xi, \xi \rangle \\ &= \int_{\Delta \setminus \biguplus_{k=1}^n \Delta_k} d\mu_{\xi, \xi} \\ &= \mu_{\xi, \xi}(\Delta \setminus \biguplus_{k=1}^n \Delta_k) \rightarrow_n 0. \end{aligned}$$

Entonces $\lim_n \sum_{k=1}^n E(\Delta_k) = E(\Delta)$ en la topología SOT.

Definición

Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible. Una medida a valores en $B(\mathcal{H})$ es un mapa $E : \mathcal{M} \rightarrow B(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, tal que

(a) $E(X) = Id$, $E(\Delta)^* E(\Delta) = E(\Delta)$, para todo $\Delta \in \mathcal{M}$.

(b) $E(\biguplus_{n=1}^\infty \Delta_n) \stackrel{SOT}{=} \sum_{n=1}^\infty E(\Delta_n)$, es decir
 $\lim_n \sum_{k=1}^n E(\Delta_k) \xi = E(\biguplus_n \Delta_n) \xi$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$.

Lema

Sean A una C^* -álgebra y $p, q \in A$ tales que $p^*p = p$, $q^*q = q$.

- (i) $(p + q)^*(p + q) = p + q$ si y sólo si $pq = 0 = qp$.
- (ii) Las afirmaciones siguientes son equivalentes: $p \leq q$; $pq = p$; $qp = p$; $p = pqp$; $p = qpq$.

Demostración.

- (i) $(p + q)^*(p + q) = (p + q)^2 = p^2 + q^2 + pq + qp$. Entonces $(p + q)^*(p + q) = p + q$ si y sólo si $pq + qp = 0$. Si $pq + qp = 0$ entonces $pq + pqp = 0$. Entonces $pqp + pqp = 0$, y por lo tanto $pqp = 0$, entonces $pq = 0$ y $qp = 0$. El recíproco es claro.
- (ii) Es claro que las últimas cuatro condiciones son equivalentes entre sí. Ahora, si $pq = p$, y por lo tanto también $qp = p$:
 $(q - p)^*(q - p) = (q - p)^2 = q^2 - pq - qp + p^2 = q - p$, entonces $q - p$ es una proyección, y $q \geq p$. Recíprocamente, si $p \leq q$:
$$(1 - q)p((1 - q)p)^* = (1 - q)p(1 - q) \leq (1 - q)q(1 - q) = 0,$$
de modo que $(1 - q)p = 0$, es decir $p = qp$.

Proposición

El mapa E verifica las siguientes propiedades.

- (a) $E(\emptyset) = 0$.
- (b) Si $\Delta \subseteq \Delta'$, entonces $E(\Delta) \leq E(\Delta')$.
- (c) Si $\{\Delta_n\} \uparrow$, entonces $E(\cup \Delta_n) = \sup_n E(\Delta_n)$.
- (d) Si $\{\Delta_n\} \downarrow$, entonces $E(\cap \Delta_n) = \inf_n E(\Delta_n)$.
- (e) Para todo par $(\xi, \eta) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, el mapa $E_{\xi, \eta} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$, tal que

$$E_{\xi, \eta}(\Delta) = \langle E(\Delta)\xi, \eta \rangle$$

es una medida compleja.

- (f) $E(\Delta \cup \Delta') + E(\Delta \cap \Delta') = E(\Delta) + E(\Delta')$.
- (g) $E(\Delta \cap \Delta') = E(\Delta)E(\Delta')$.

Demostración.

(a) Se deduce de (e), cuya demostración a su vez es inmediata.

(b) $\Delta' = \Delta \uplus \Delta' \setminus \Delta$. Entonces $E(\Delta') = E(\Delta) + E(\Delta' \setminus \Delta) \geq E(\Delta)$.

(c) y (d) Ejercicio.

(f) $\Delta \cup \Delta' = \Delta \uplus (\Delta' \setminus \Delta \cap \Delta')$. Entonces

$$E(\Delta \cup \Delta') = E(\Delta) + E(\Delta') - E(\Delta \cap \Delta').$$

(g) Se tiene $E(\Delta) [E(\Delta \cup \Delta') + E(\Delta \cap \Delta')] = E(\Delta) [E(\Delta) + E(\Delta')]$.
Ahora, por un lado es :

$$E(\Delta) [E(\Delta \cup \Delta') + E(\Delta \cap \Delta')] = E(\Delta) + E(\Delta \cap \Delta').$$

Por otro lado:

$$E(\Delta) [E(\Delta) + E(\Delta')] = E(\Delta) + E(\Delta)E(\Delta').$$

Entonces $E(\Delta \cap \Delta') = E(\Delta)E(\Delta')$.



Definición

Sea X un espacio localmente compacto de Hausdorff, y sea $E : \mathcal{B}_X \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una medida a valores en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Se dice que E es una medida espectral si es regular, es decir cada $E_{\xi,\eta}$ es regular.

Observación (m -topología)

Sea X un espacio localmente compacto de Hausdorff. Para cada $\mu \in M(X)$ consideremos los mapas $p_\mu : B_\infty(X) \rightarrow \mathbb{C}$ dados por

$$p_\mu(\varphi) := \left| \int \varphi d\mu \right|.$$

Entonces p_μ es una seminorma sobre $B_\infty(X)$ para cada $\mu \in M(X)$, y la familia $\{p_\mu : \mu \in M(X)\}$ separa puntos de $B_\infty(X)$ (basta tomar las δ_x). La topología localmente convexa definida por esta familia será denotada por m . Observar que $\varphi_i \xrightarrow{m} \varphi$ si y sólo si $\int \varphi_i d\mu \rightarrow \int \varphi d\mu$ para todo $\mu \in M(X)$. La m -topología es la topología realtiva por $B_\infty(X)$ como subespacio de $(M(X)', w^*)$.

Notar que

- (i) $(B_\infty(X), m)' = M(X)$.
- (ii) La topología inducida por m sobre $C_0(X)$ es la topología débil de $C_0(X)$.

Lema

$$\overline{C_0(X)}^m = B_\infty(X).$$

Demostración.

Si $\mu \in (B_\infty(X), m)'$ es tal que $\mu|_{C_0(X)} = 0$, entonces $\int a d\mu = 0$ para todo $a \in C_0(X)$. Luego $\mu = 0$. □

Proposición

Sea $\pi : C_0(X) \rightarrow B(\mathcal{H})$ una representación no degenerada. Entonces

- (i) π es $(w\text{-}WOT)$ -continua.
- (ii) Existe una única representación $\bar{\pi} : B_\infty(X) \rightarrow B(\mathcal{H})$ tal que
$$\begin{cases} \bar{\pi}|_{C_0(X)} = \pi, \\ \bar{\pi} \text{ es } (m\text{-}WOT)\text{-continua.} \end{cases}$$
- (iii) π induce una medida espectral sobre X , mediante

$$E(\Delta) := \bar{\pi}(\chi_\Delta).$$

Demostración.

- (i) Recordar que $\langle \pi(a)\xi, \eta \rangle = \int a d\mu_{\xi, \eta}$. Por lo tanto si $a_i \xrightarrow{w} a$ entonces $\int a_i d\mu_{\xi, \eta} \rightarrow_i \int a d\mu_{\xi, \eta}$. Luego $\langle \pi(a_i)\xi, \eta \rangle \rightarrow_i \langle \pi(a)\xi, \eta \rangle$, es decir $\pi(a_i) \xrightarrow{WOT} \pi(a)$.
- (ii) Sabemos que $\bar{\pi} : B_\infty(X) \rightarrow B(\mathcal{H})$ tal que $\langle \bar{\pi}(\varphi)\xi, \eta \rangle = \int \varphi d\mu_{\xi, \eta}$ es una representación de $B_\infty(X)$ tal que $\overline{\pi|_{C_0(X)}} = \pi$.
- 1 $\bar{\pi}$ es (m -WOT)-continua: si $\varphi_i \xrightarrow{m} \varphi$ entonces $\int \varphi_i d\mu_{\xi, \eta} \rightarrow_i \int \varphi d\mu_{\xi, \eta}$ para todos $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Entonces $\langle \bar{\pi}(\varphi_i)\xi, \eta \rangle \rightarrow_i \langle \bar{\pi}(\varphi)\xi, \eta \rangle$ para todos $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, es decir $\bar{\pi}(\varphi_i) \xrightarrow{WOT} \bar{\pi}(\varphi)$.
 - 2 Como $C_0(X)$ es denso en $B_\infty(X)$ con la m -topología, $\bar{\pi}$ es la única representación de $B_\infty(X)$ que satisface las propiedades requeridas.
- (iii) Lo vimos anteriormente.



Definición

Sean (X, μ) un espacio medible y $E : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una medida. Si $\varphi = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{\Delta_k}$, con $\{\Delta_k\}_{k=1}^n$ disjunto, entonces

$$\int \varphi dE := \sum_{k=1}^n \alpha_k E(\Delta_k).$$

(no depende de la representación elegida.)

Observaciones

- (a) $\langle (\int \varphi dE)\xi, \eta \rangle = \int \varphi dE_{\xi, \eta}$ para todos $\xi, \eta \in \mathcal{H}$.
- (b) $\begin{aligned} \|\int \varphi dE \xi\|^2 &= \|\sum_{i=1}^n \alpha_i E(\Delta_i)\xi\|^2 = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \bar{\alpha}_j \langle E(\Delta_j)E(\Delta_i)\xi, \xi \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \|E(\Delta_i)\xi\|^2 \leq (\max_{1 \leq j \leq n} |\alpha_j|)^2 \sum_{i=1}^n \|E(\Delta_i)\xi\|^2 \\ &= (\max_{1 \leq j \leq n} |\alpha_j|)^2 \|E(\Delta)\xi\|^2 = \|\varphi\|_\infty \|E(\Delta)\xi\|^2 \leq \|\varphi\|_\infty \|\xi\|^2. \end{aligned}$

Luego $\|\int \varphi dE\| \leq \|\varphi\|_\infty$.

- (c) Entonces $\varphi \mapsto \int \varphi dE$ es un operador lineal y contractivo sobre las funciones simples, y por lo tanto se extiende por continuidad a

$$\int dE : \mathcal{M}_\infty := \{\varphi : X \rightarrow \mathbb{C} : \varphi \text{ es } \mathcal{M}\text{-medible}, \|\varphi\|_\infty < \infty\} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

- (d) Sean $\varphi \in \mathcal{M}_\infty(X)$ y $\varphi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} \varphi$, donde φ_n es simple, para todo n . Entonces, para todos ξ, η :

$$\langle (\int \varphi dE)\xi, \eta \rangle = \langle \lim_n (\int \varphi_n dE)\xi, \eta \rangle = \lim_n \int \varphi_n dE_{\xi, \eta} = \int \varphi dE_{\xi, \eta}.$$

Entonces $\langle (\int \varphi dE)\xi, \eta \rangle = \int \varphi dE_{\xi, \eta}$.

Proposición

Sea $E : \mathcal{B}_X \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una medida espectral. Entonces $\rho_E : B_\infty(X) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que

$$\rho_E(\varphi) = \int \varphi dE$$

es una representación tal que:

- (1) $\rho_E(1) = Id$.
- (2) ρ_E es $(m\text{-WOT})$ -continua.
- (3) Si $\pi_E : C_0(X) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es la representación $\pi_E := \rho_E|_{C_0(X)}$, entonces π_E es una representación no degenerada de $C_0(X)$.

Demostración.

Es claro que ρ_E es lineal. Veamos que preserva la involución:

$$\begin{aligned}\langle \rho_E(\overline{\varphi})\xi, \eta \rangle &= \int \overline{\varphi} dE_{\xi, \eta} = \overline{\int \varphi d\overline{E}_{\xi, \eta}} = \overline{\int \varphi dE_{\eta, \xi}} \\ &= \overline{\langle \rho_E(\varphi)\eta, \xi \rangle} = \langle \xi, \rho_E(\varphi)\eta \rangle = \langle \rho_E(\varphi)^*\xi, \eta \rangle\end{aligned}$$

para todos ξ, η . Entonces $\rho_E(\overline{\varphi}) = \rho_E(\varphi)^*$.

Como $E(\Delta \cap \Delta') = E(\Delta)E(\Delta')$ se tiene $\rho_E(\chi_{\Delta}\chi_{\Delta'}) = \rho_E(\chi_{\Delta})\rho_E(\chi_{\Delta'})$, de donde sigue inmediatamente que ρ_E es multiplicativa. Por lo tanto ρ_E es una representación. Además:

(1) $\rho_E(1) = \rho_E(\chi_X) = E(X) = Id.$

(2) Veamos que ρ_E es $(m - WOT)$ -continua: como E es una medida espectral entonces $E_{\xi, \eta} \in M(X)$. Luego si $\varphi_i \xrightarrow{m} \varphi$, se tiene $\int \varphi_i d\mu \rightarrow_i \int \varphi d\mu$ para todo $\mu \in M(X)$, y en particular para $\mu = E_{\xi, \eta}$. Entonces

$$\langle \int \varphi_i dE \xi, \eta \rangle = \int \varphi_i dE_{\xi, \eta} \rightarrow_i \int \varphi dE_{\xi, \eta} = \langle (\int \varphi dE) \xi, \eta \rangle.$$

Entonces $\rho_E(\varphi_i) \xrightarrow{WOT} \rho_E(\varphi)$.

Continuación de la demostración.

(3) Es claro que π_E es una representación, pues es restricción de una representación. Hay que ver que π_E es no degenerada.

Supongamos que $\eta \in \mathcal{H}$ es tal que $\eta \perp \pi_E(a)\xi$ para todo $a \in C_0(X)$, $\xi \in \mathcal{H}$. Entonces $\langle \pi_E(a)\xi, \eta \rangle = 0$ para todo $a \in C_0(X)$ y para todo $\xi \in \mathcal{H}$, y por lo tanto es $\int a dE_{\xi, \eta} = 0$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Pero entonces $E_{\xi, \eta} = 0$, de donde $\langle E(\Delta)\xi, \eta \rangle = 0$ para todo $\Delta \in \mathcal{B}_X$ y $\xi \in \mathcal{H}$. En particular:

$$\langle \xi, \eta \rangle = \langle E(X)\xi, \eta \rangle = 0$$

para todo $\xi \in \mathcal{H}$, de modo que $\eta = 0$.

Luego $\overline{\text{span}}\{\pi_E(a)\xi : a \in C_0(X), \xi \in \mathcal{H}\} = \mathcal{H}$, es decir, π_E es no degenerada.

Teorema

Sean:

$\mathcal{R}(C_0(X), \mathcal{H}) := \{\pi : C_0(X) \rightarrow B(\mathcal{H}) : \pi \text{ representación no degenerada}\}.$

$\mathcal{R}(X, \mathcal{H}) := \{\rho : B_\infty(X) \rightarrow B(\mathcal{H}) : \rho(1) = Id, \rho \text{ es } (m\text{-WOT})\text{-continua}\}.$

$\mathcal{E}(X, \mathcal{H}) := \{E : \mathcal{B}_X \rightarrow B(\mathcal{H}) : E \text{ es medida espectral}\}.$

Entonces los mapas

$$\begin{aligned}\alpha : \mathcal{R}(X, \mathcal{H}) &\rightarrow \mathcal{R}ep(C_0(X), B(\mathcal{H})), \\ \rho &\mapsto \rho|_{C_0(X)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta : \mathcal{R}(X, \mathcal{H}) &\rightarrow \mathcal{E}(X, \mathcal{H}), \\ \rho &\mapsto \rho|_{\mathcal{B}_X}\end{aligned}$$

son biyecciones, cuyas inversas están dadas por: $\alpha^{-1}(\pi)$ es la única extensión de π a una representación $(m - \text{WOT})$ -continua y $\beta^{-1}(E) = \rho_E$ tal que $\rho_E(\varphi) = \int \varphi dE$.

Corolario

El mapa $\mathcal{E}(X, \mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{R}(C_0(X), \mathcal{H})$ tal que $E \mapsto \pi_E$, donde $\pi_E(a) = \int_X a dE$, es una biyección.

Proposición

Sean E una medida espectral en el espacio LCH X , y $\pi_E : C_0(X) \rightarrow B(\mathcal{H})$ su representación asociada. Entonces π_E es inyectiva si y sólo si $E(V) \neq 0$ para todo $V \neq \emptyset$ abierto.

Demostración.

($\Rightarrow$) Sea $V \subseteq X$ abierto no vacío. Sean $a \in C_0(X)$ tal que $0 \leq a \leq 1$, $a \neq 0$ y $a|_{X \setminus V} = 0$ y $\xi \in \mathcal{H}$ tal que $\pi_E(a)\xi \neq 0$. Por lo tanto $\|\pi_E(a)\xi\|^2 > 0$. Entonces $E(V) \neq 0$, porque:

$$0 < \langle \pi_E(a^*a)\xi, \xi \rangle = \int a^2 dE_{\xi, \xi} \leq E_{\xi, \xi}(V) = \langle E(V)\xi, \xi \rangle = \|E(V)\xi\|^2.$$

($\Leftarrow$) Dado $a \in C_0(X)$ con $a \neq 0$, existen $V \neq \emptyset$ abierto y $\alpha > 0$ tales que $|a|^2 > \alpha \chi_V$. Entonces, dado $\xi \in \mathcal{H}$:

$$\|\pi_E(a)\xi\|^2 = \langle \pi_E(|a|^2)\xi, \xi \rangle = \int |a|^2 dE_{\xi, \xi} \geq \alpha \int \chi_V dE_{\xi, \xi} \geq \alpha \|E(V)\xi\|^2.$$

Como $E(V) \neq 0$, existe $\xi \in \mathcal{H}$ tal que $\|E(V)\xi\|^2 \neq 0$. Por lo tanto $\pi_E(a)\xi \neq 0$. Entonces $\pi_E(a) \neq 0$. □

Proposición

Sean E una medida espectral en el espacio LCH X y $\pi_E : C_0(X) \rightarrow B(\mathcal{H})$ su representación asociada. Entonces

$$\pi_E(C_0(X))' = \{E(\Delta) : \Delta \in \mathcal{B}_X\}'.$$

Demostración.

Llamemos $A = C_0(X)$. Sea $T \in B(\mathcal{H})$. Entonces

$$\begin{aligned} T \in \pi_E(A)' &\Leftrightarrow T\pi_E(a) = \pi_E(a)T \quad \forall a \in A \\ &\Leftrightarrow \langle T\pi_E(a)\xi, \eta \rangle = \langle \pi_E(a)T\xi, \eta \rangle \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}, a \in A. \end{aligned}$$

Como $\langle T\pi_E(a)\xi, \eta \rangle = \langle \pi_E(a)\xi, T^*\eta \rangle$, se tiene

$$\begin{aligned} T \in \pi_E(A)' &\Leftrightarrow \int adE_{\xi, T^*\eta} = \int adE_{T\xi, \eta} \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}, a \in A \\ &\Leftrightarrow E_{T\xi, \eta}(\Delta) = E_{\xi, T^*\eta}(\Delta) \quad \forall \Delta \in \mathcal{B}_X \\ &\Leftrightarrow TE(\Delta) = E(\Delta)T \quad \forall \Delta \in \mathcal{B}_X, \\ &\Leftrightarrow T \in \{E(\Delta) : \Delta \in \mathcal{B}_X\}'. \end{aligned}$$



Teorema (Teorema espectral)

Sea $N \in B(\mathcal{H})$ un operador normal. Entonces existe una medida espectral $E : \mathcal{B}_{\sigma(N)} \rightarrow B(\mathcal{H})$ tal que $N = \int_{\sigma(N)} \lambda dE(\lambda)$. Más aun, se tiene:

- (i) $a(N) = \int_{\sigma(N)} a dE$, para todo $a \in C_0(X)$.
- (ii) $E(V) \neq 0$, para todo V abierto en $\sigma(N)$, $V \neq \emptyset$.
- (iii) $TN = NT$ si y sólo si $TE(\Delta) = E(\Delta)T$, para todo $\Delta \in \mathcal{B}_{\sigma(N)}$.

Demostración.

Sea $A = C(\sigma(N))$, y sea $\tau_N : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ el cálculo funcional continuo. Entonces τ_N es una representación fiel y no degenerada de A sobre $\mathcal{H}$, cuya imagen es $\tau_N(A) = C^*(Id, N)$. Sea E la medida espectral asociada a τ_N . Entonces:

- (i) Ya lo sabemos.
- (ii) Es la proposición anterior.
- (iii) $TN = NT$ si y sólo si $TN = NT$ y $TN^* = N^*T$ (por el teorema de Fuglede-Putnam) si y sólo si $T \in \tau_N(A)'$ si y sólo si $TE(\Delta) = E(\Delta)T$ para todo $\Delta \in \mathcal{B}_{\sigma(N)}$ (por la proposición anterior).

Corolario

Sea $N \in B(\mathcal{H})$ normal. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existen $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ y $P_1, \dots, P_k \in \text{Proy}(\mathcal{H})$ tales que $P_j^* P_i = \delta_{ij} P_i$, que cumplen:

$$\|N - \sum_{j=1}^k \alpha_j P_j\| < \varepsilon.$$

Demostración.

Se tiene $N = \int \text{inc} dE$, $\text{inc} : \sigma(N) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\text{inc}(\lambda) = \lambda$. Como las funciones simples son densas (uniformemente) en $B_\infty(\sigma(N))$, existe $\varphi = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{\Delta_j}$ (con los $\{\Delta_j\}_{j=1}^k$ disjuntos) tal que $\|\text{inc} - \varphi\|_\infty < \varepsilon$. Entonces

$$\|N - \sum_{j=1}^k \alpha_j E(\Delta_j)\| = \left\| \int (\text{inc} - \varphi) dE \right\| \leq \|\text{inc} - \varphi\|_\infty < \varepsilon.$$



Sea $N \in B(\mathcal{H})$ normal, con medida espectral E . Entonces el mapa

$$\begin{aligned}\tau : B_\infty(\sigma(N)) &\rightarrow B(\mathcal{H}) \\ \varphi &\mapsto \int \varphi dE\end{aligned}$$

es una representación unital. Se llama *cálculo funcional de Borel* sobre N .

Si $\int \varphi_i d\mu \rightarrow \int \varphi d\mu$ para todo $\mu \in M(\sigma(N))$ (es decir $\varphi_i \xrightarrow{m} \varphi$), entonces $\tau(\varphi_i) \xrightarrow{WOT} \tau(\varphi)$. Además, si $\tau' : B_\infty(\sigma(N)) \rightarrow B(\mathcal{H})$ es una representación unital tal que $\tau'(\text{inc}) = N$ y $\tau'(\varphi_i) \xrightarrow{WOT} \tau'(\varphi)$ si $\int \varphi_i d\mu \rightarrow \int \varphi d\mu$ para todo μ , entonces $\tau = \tau'$.

Demostración.

Como $\tau|_{C(\sigma(N))} = \tau'|_{C(\sigma(N))}$ (cálculo funcional continuo τ_N) entonces ambas son extensiones $(m - WOT)$ -continuas de τ_N . Entonces coinciden. □

Recordar que si $T \in B(\mathcal{H})$, entonces

Espectro:

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - T \notin \text{Inv}(B(\mathcal{H}))\}.$$

Espectro puntual:

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(T - \lambda) \neq 0\}.$$

Espectro aproximado:

$$\sigma_{ap}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0, \exists \xi \in \mathcal{H} : \|\xi\| = 1 \text{ y } \|T\xi - \lambda\xi\| < \varepsilon\}.$$

Observar que $\sigma_{ap}(T) \subseteq \sigma(T)$.

Teorema

Si $N \in B(\mathcal{H})$ es normal, entonces $\sigma(N) = \sigma_{ap}(N)$.

Demostración.

Sean $\lambda_0 \in \sigma(N)$ y $\varepsilon > 0$. Entonces, si $D = \overline{D}(\lambda_0, \varepsilon) \cap \sigma(N)$ se tiene que $E(D) \neq 0$. Por lo tanto existe $\xi \in E(D)\mathcal{H}$, $\|\xi\| = 1$. Se tiene:

$$\|N\xi - \lambda_0\xi\|^2 = \langle (N - \lambda_0)^*(N - \lambda_0)\xi, \xi \rangle = \int |\lambda - \lambda_0|^2 dE_{\xi, \xi}(\lambda).$$

Supongamos que $\Delta \subseteq \sigma(N)$ es tal que $\Delta \cap D = \emptyset$. Entonces $E(\Delta)E(D) = E(\Delta \cap D) = E(\emptyset) = 0$, de modo que, como $\xi = E(D)\xi$:

$$E_{\xi, \xi}(\Delta) = \langle E(\Delta)\xi, \xi \rangle = \langle E(\Delta)E(D)\xi, \xi \rangle = 0$$

Entonces

$$\|N\xi - \lambda_0\xi\|^2 = \int |\lambda - \lambda_0|^2 dE_{\xi, \xi} \leq \varepsilon^2 E_{\xi, \xi}(D) \leq \varepsilon^2 \|\xi\|^2 = \varepsilon^2.$$

Luego $\|N\xi - \lambda_0\xi\| \leq \varepsilon$. Entonces $\lambda_0 \in \sigma_{ap}(N)$.



Sea $U : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ dado por $U\xi(t) = e^{it}\xi(t)$.

(a) U es un operador unitario: $U^* = U^{-1}$, $U^{-1}\xi(t) = e^{-it}\xi(t)$. En particular es normal.

(b) $\sigma(U) = S^1$. Como U es unitario sólo hay que ver que $\sigma(U) \supseteq S^1$. Para cada $s \in \mathbb{R}$, sea $V_s : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ dada por $V_s\xi(t) = \xi(s+t)$. Entonces $V_s^* = V_s^{-1} = V_{-s}$. Por lo tanto $\alpha_s : B(L^2(\mathbb{R})) \rightarrow B(L^2(\mathbb{R}))$ dado por $\alpha_s(T) = V_s T V_s^*$, es un automorfismo de $B(L^2(\mathbb{R}))$. En consecuencia $\sigma(U) = \sigma(\alpha_s(U))$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Ahora:

$$\alpha_s(U)\xi|_t = V_s U V_{-s}\xi|_t = U V_{-s}\xi|_{s+t} = e^{i(s+t)} V_{-s}\xi(s+t) = e^{is} e^{it}\xi(t).$$

Entonces $\alpha_s(U) = e^{is}U$. Luego es $\sigma(U) = \sigma(e^{is}U) = e^{is}\sigma(U)$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Entonces $\sigma(U) = S^1$.

(c) Sea $E : \mathcal{B}_{\sigma(U)} \rightarrow B(L^2(\mathbb{R}))$ la medida espectral de U . Debe ser:

$$\int_{\sigma(U)} a dE_{\xi,\eta} = \langle \tau_U(a)\xi, \eta \rangle = \langle M_{\tilde{a}}\xi, \eta \rangle,$$

donde $\tilde{a}(t) = a(e^{it})$.

En efecto, el mapa: $C(\sigma(U)) \rightarrow B(L^2(\mathbb{R}))$, tal que $a \mapsto M_{\tilde{a}}$ es una representación tal que $1 \mapsto Id$, $inc \mapsto U$. Entonces, por la unicidad del cálculo funcional continuo, es $M_{\tilde{a}} = a(U) \forall a \in C(\sigma(U))$. Luego es $\int_{S^1} adE_{\xi,\eta} = \langle M_{\tilde{a}}\xi, \eta \rangle$, y por lo tanto $\int adE = M_{\tilde{a}} \forall a \in C(\sigma(U))$.

Veamos ahora que si $\varphi \in L^\infty(S^1)$, es $\int \varphi dE = M_{\tilde{\varphi}}$, donde $\tilde{\varphi} = \varphi(e^{it})$. En primer lugar es claro que $\varphi \mapsto M_{\tilde{\varphi}}$ es una representación de $L^\infty(S^1)$ y que su restricción a $C(S^1)$ coincide con τ_U . Por otro lado, si $\varphi_i \xrightarrow{m} \varphi$ (o sea $\int \varphi_i d\mu \rightarrow \int \varphi d\mu$ para todo $\mu \in M(S^1)$), entonces

$$\langle M_{\tilde{\varphi}_i}\xi, \eta \rangle = \int \varphi_i dE_{\xi,\eta} \rightarrow \int \varphi dE_{\xi,\eta} = \langle M_{\tilde{\varphi}}\xi, \eta \rangle.$$

Luego es $M_{\tilde{\varphi}_i} \xrightarrow{WOT} M_{\tilde{\varphi}}$. Entonces $\varphi \mapsto M_{\tilde{\varphi}}$ es la única representación $(m - WOT)$ -continua de $L^\infty(S^1)$ que extiende a τ_U . En particular

$$E(\Delta) = M_{\tilde{\chi}_\Delta} = M_{\chi_{\tilde{\Delta}}}, \text{ donde } \tilde{\chi}_\Delta(t) = \chi_{\tilde{\Delta}}(e^{it}) = \begin{cases} 1 & \text{si } e^{it} \in \Delta, \\ 0 & \text{si } e^{it} \notin \Delta. \end{cases}$$

Es decir $E(\Delta) = \tilde{\chi}_\Delta = \chi_{\tilde{\Delta}}$, donde $\tilde{\Delta} = -i \exp^{-1}(\Delta)$.